⋆ ⋆
Exercice 1

Calculer à l'aide d'un ou plusieurs changement d'indice :

1) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} x^{k-2}$
2) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} (n-k)^2$
3) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{k-1}$
4) $\displaystyle\sum_{k=10}^{55} (k-10)$
5) $\displaystyle\sum_{k=2}^{11} \ln\left(\frac{2^k}{4}\right)$
6) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2k-n}$
7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \sum_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
8) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

⋆ ⋆
Exercice 2

Calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} 3^k$
2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{kx}$, avec $x \in \mathbb{R}$.
3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{2^k}}$
4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{3k}}{2^k}$
5) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$
6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 3

Calculer les sommes doubles suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n} 2^{i+3j}$
2) $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i,j)$
3) $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} |i-j|$

⋆
Exercice 4

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{20x}{25-x}$
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

1) Montrer que l'intervalle $[0,5]$ est stable par f, c'est à dire montrer que
$$\forall x \in [0,5], \quad f(x) \in [0,5]$$
2) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 5$.
3) En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.

⋆
Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{u_n+1}$.
En vous inspirant de l'exercice précédant, étudier la convergence de la suite (u_n). On pourra commencer par montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$.

⋆ ⋆
Exercice 6

Soit $a \in [-\pi/2, \pi/2]$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2\cos a$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right)$.

⋆
Exercice 7

On considère la suite (S_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

1) Étudier le sens de variation de la suite (S_n)
2) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$
3) En déduire que (S_n) converge et préciser sa limite.

⋆
Exercice 8

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
2) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k)^2$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)^2$.

⋆ ⋆
Exercice 9

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$
puis calculer
$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1)^3$$

⋆ ⋆
Exercice 10

Simplifier l'expression suivante :
$$f(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

⋆
Exercice 11

La suite de Fibonacci est la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

⋆
Exercice 12

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$, $u_1 = 21$ et $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n(5+2n)$.

⋆ ⋆
Exercice 13

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3}u_n$$
1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$.
2) En déduire la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

$\star\star$

Exercice 14

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application injective telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leq n$. Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$

$\star\star$

Exercice 15

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_1 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = 3n + 3 + \frac{6}{2n+1} \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $u_n = 3n^2$.